I. Espace probabilisé finis الفضاءات الاحتمالية المنتهية .I

1) كون الإمكانيات ـ الأحداث :

a) كون الإمكانيات:

نعتبر التجربة التالية : نرمي قطعة نقدية ثم نسحب كرة من بين سبع كرات مرقمة من 1 الى 7 .
النتائج التي يمكن الحصول عليها في هذه التجربة هي أزواج مثل (P,1) و (F,3) و (P,7) .
المجموعة التي تتضمن جميه هذه النتائج تسمى كون الإمكانيات (Univers des possibilités) ونرمز لها Ω ، ومنه فإن :
$\Omega=\{(P,1) ; (P,2) ; (P,3) ; (P,4) ; (P,5) ; (P,6) ; (P,7) ; (F,1) ; (F,2) ; (F,3) ; (F,4) ; (F,5) ; (F,6) ; (F,7)\}$
عدد الإمكانيات المتاحة في هذه التجربة هي : $Card\Omega=12$

b) الأحداث :

الحدث هو كل جزء من كون الإمكانيات .
في المثال السابقة $A=\{((P,2) ; (P,4) ; (F,3) ; (F,4)\}$ هو حدث ولدينا $CardA=4$
وكذلك $B=\{((P,3) ; (F,1)\}$ و $C=\{((P,5)\}$ و $D=\phi$ و Ω هي أحدا ث .
ولدينا : $CardB=2$ و $CardC=1$ و $Card\phi=0$ و $Card\Omega=12$.

- المجموعة الفارغة ϕ تسمى الحدث المستحيل . (l'événement impossible)
- الكون Ω يسمى الحدث الأكيد. (l'événement certain)
-
- الأحداث التي تحتوي على نتيجة واحدة بالضبط مثل الحدث C تسمى الأحداث الابتدائية . (Evénements élémentaires).
- نعتبر حدثا E للكون Ω . الحدث $\overline{E}$ وهو متممة E في Ω ، يسمى الحدث المضاد للحدث E.. (l'événement contraire)
- يكون الحدثان E و F منفصلان أوغير منسجمان (Incompatibles)، إذا كان $E\cap F=\phi$

2) تعريف الاحتمال :

ليكن Ω مجموعة منتهية غير فارغة .
نسمي احتمالا على Ω ، كل تطبيق p من $P(\Omega)$ نحو المجال $[0,1]$ ، بحيث :
i. $p(\Omega)=1$.
ii. لكل حدثين غير منسجمين A و B فإن : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
المثلوث $(\Omega;P(\Omega);p)$ يسمى فضاء احتمالي منتهي .

3) خاصيات :

ليكن $(\Omega;P(\Omega);p)$ فضاء احتماليا منتهيا ، بحيث : $\begin{array}{l} p:P(\Omega)\to[0,1] \\ \quad A \ \to \ p(A)\end{array}$
مهما يكن الحدثين A و B نسمي لدينا :
i. $p(\phi)=0$.
ii. $A\subset B \ \Rightarrow \ P(A)\le P(B)$
iii. $P(\overline{A})=1-P(A)$
iv. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

برهان :
....

4) الاحتمال المنتظم : تعريف وخاصية

نقول أن كون الإمكانيات Ω مزود باحتمال منتظم p ؛ إذا كانت لجميع الأحداث الابتدائية نفس الاحتمال .
في هذه الحالة :

- مهما يكن الحدث الابتدائي E ؛ فإن : $p(E) = \dfrac{1}{\text{Card}\Omega}$
- مهما يكن الحدث A ؛ فإن : $p(A) = \dfrac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega}$

برهان :

....

II. La Variable aléatoire المتغير العشوائي .II

1) تقديم من خلال مثال :

يحتوي كيس على 10 كرات موزعة على الشكل التالي:5 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء و 2 كرات سوداء .
نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الكيس.
ليكن X المتغير العشوائي المرتبط بعدد الكرات البيضاء الموجودة في كل سحبة.

a) حدد قيم المتغير العشوائي X .
b) حدد الحدث المرتبط بكل قيمة من قيم X .
c) حدد قانون احتمال X .

الحل :

a) القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي : $X=0$ و $X=1$ و $X=2$ و $X=3$

b) $X=0$ هو الحدث " السحبة لا تحتوي على أية كرة بيضاء "
$X=1$ هو الحدث " السحبة تحتوي على كرة بيضاء واحة بالضبط "
$X=2$ هو الحدث " السحبة تحتوي على كرتين بيضاوتين بالضبط "
$X=3$ هو الحدث " السحبة تحتوي على 3 كرات بيضاء بالضبط "

c) قانون احتمال المتغير العشوائي X هو جدول مكون من سطرين .
يحتوي السطر الأول على القيم الممكنة ل X ، ويحتوي السطر الثاني على الاحتمالات الموافقة لكل قيمة من قيم X .
لدينا :

$$p(X=0) = \frac{C_5^0 C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{1\times 10}{C_{10}^3} = \frac{10}{120}$$

$$p(X=1) = \frac{C_5^1 C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{5\times 10}{C_{10}^3} = \frac{50}{120}$$

$$p(X=2) = \frac{C_5^2 C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{10\times 5}{C_{10}^3} = \frac{50}{120}$$

$$p(X=3) = \frac{C_5^3 C_5^0}{C_{10}^3} = \frac{10\times 1}{C_{10}^3} = \frac{10}{120}$$

ومنه نستنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X :

$X=x_i$	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$	$\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$	$\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$	$\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$

2) الأمل الرياضي والمغارةوالانحراف الطرازي :

- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X هو العدد الذي نرمز له ب $E(X)$ بحيث :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{i=n}x_ip(x_i)$$

- مغايرة المتغير العشوائي X هو العدد الذي نرمز له ب $Var(X)$ بحيث :

$$Var(X)=\sum_{i=1}^{i=n}[x_i-E(x)]^2p(x_i)=\sum_{i=1}^{i=n}x_i^2p(x_i)-E(x)^2=E(x^2)-E(x)^2$$

- الانحراف الطرازي للمتغير العشوائي X هو العدد الذي نرمز له ب $\sigma(X)$ بحيث :

$$\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}$$

III. Probabilité Conditionnelle الاحتمال الشرطي .III

3) دراسة مثال :

نرمي قطعة نقدية ثم نردا له ستة أوجه مرقمة من 1 الى 6 .
ونعتبر الحدثين التاليين :
A " القطعة النقدية تعطي F " و B " النرد يعطي 3 أو 5 "

a) حدد $Card\Omega$.
b) حدد $p(A)$ و $p(B)$ و $p(A\cap B)$.
c) احسب احتمال أن يتحقق الحدث B ، علما أن الحدث A قد تحقق (نرمز لهذا الاحتمال $p(B/A)$ أو $p_A(B)$)
d) احسب احتمال أن يتحقق الحدث A ، علما أن الحدث B قد تحقق (نرمز لهذا الاحتمال $p(A/B)$ أو $p_B(A)$)
e) تحقق أن : $p(A\cap B)=p(A)p(B/A)$ و $p(A\cap B)=p(B)p(A/B)$

الحل :

a) لدينا : $Card\Omega=2\times 6=12$.
b) لدينا : $p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ و $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ و $p(A\cap B)=\frac{Card(A\cap B)}{Card\Omega}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.
c) لدينا : $p(B/A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
d) لدينا : $p(A/B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
e) لدينا : $p(A\cap B)=\frac{1}{6}$ و $p(A)=\frac{1}{2}$ و $p(B)=\frac{1}{3}$ و $p(A/B)=\frac{1}{2}$ و $p(B/A)=\frac{1}{3}$
ومنه : $p(A)p(B/A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=p(A\cap B)$ و $p(B)p(A/B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}=p(A\cap B)$
نستنتج أن : $p(A\cap B)=p(A)p(B/A)$ و $p(A\cap B)=p(B)p(A/B)$

4) بصفة عامة :

A و B حدثان .
$p(A/B)$ هو احتمال تحقق الحدث A علما أن الحدث B قد تحقق.
$p(B/A)$ هو احتمال تحقق الحدث B علما أن الحدث A قد تحقق.
لدينا : $p(A\cap B)=p(A)p(B/A)$ و $p(A\cap B)=p(B)p(A/B)$

5) الحدثان المستقلان :

يكون الحدثان A و B مستقلان إذا وفقط كان $p(A\cap B)=p(A)p(B)$.
أي أن $p(A/B)=p(A)$ و $p(B/A)=p(B)$

IV. الاختبارات المتكررة Les épreuves répétées

1) دراسة مثال :

نرمي نردا له ستة أوجه مرقمة من 1 الى 6 .
ليكن الحدث : A " النرد يعطي 3 أو 5 " نضع $p(A)=p$.

a) احسب p .

b) نعيد هذه التجربة خمس مرات ماهو احتما أن يتحقق الحدث A ثلاث مرات بالضبط .

الحل :

a) لدينا : $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}$.

b) يتحقق الحدث A ثلاث مرات ، يعني أنه يتحقق ثلاث مرات و يتحقق الحدث $\overline{A}$ مرتين : $p(\overline{A})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

إذا أخذنا بعين الاعتبار عدد التبديلات بالتكرار يكون الاحتمال هو:

$$p'=\frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=C_5^2p^2(1-p)^3$$

2) خاصية :

ليكن $n\in IN^*$ وليكن S حدثا احتماله p خلال تجربة معينة.
إذا أعيد هذا الاختبار n مرة ، فإن احتمال تحقق الحدث S ، k مرة بالضبط (حيث $0\le k\le n$) هو :
$C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$

Bonne Chance

maths-inter.ma